

1. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что число  $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$  — рациональное. Докажите, что число  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$  — целое.

2. Дано натуральное число  $n$ . Положительные числа  $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$  удовлетворяют условию

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_{n+1}+1} = n.$$

Докажите неравенство

$$\frac{1}{n^2a_1+1} + \frac{1}{n^2a_2+1} + \dots + \frac{1}{n^2a_{n+1}+1} \geq 1.$$

3. Натуральное число называется *невозрастающим*, если в его десятичной записи цифры идут в невозрастающем порядке слева направо. Докажите, что если невозрастающее число делится нацело на 101, то частное тоже является невозрастающим.

4. Даны  $n$  шаров  $S_1, S_2, \dots, S_n$  равного радиуса, причем шары  $S_i$  и  $S_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) касаются в точке  $A_i$  (мы считаем  $S_{n+1} = S_1$ ). Точка  $P$  лежит вне всех этих шаров. Докажите, что произведение длин касательных из  $P$  к этим шарам не больше произведения длин отрезков  $PA_i$ .

5. Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный.

6. Назовём *лесенкой* клетчатую фигуру, состоящую из всех клеток, расположенных в каком-нибудь квадрате с одной стороны от его диагонали. Можно ли какой-нибудь квадрат разбить на 2007 лесенок, каждая из которых содержит не менее 120 клеток?

7. В стране некоторые города соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Известно, что любые два замкнутых авиамаршрута, состоящих из нечетного числа перелетов каждый, проходят хотя бы через два общих города. Докажите, что все города можно распределить по четырем федеральным округам так, чтобы любая авиалиния соединяла города из двух различных округов.

8. Натуральное число  $n$  таково, что среди любых  $n$  различных попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 2007, найдется простое число. Найдите минимальное возможное значение  $n$ .

9. В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $ABD$  и  $ACD$  прямые, а точка  $M$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников  $ABM$  и  $CDM$ , параллельна прямой, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $CD$ .

10. У Васи есть 1007 рублей, и еще 1000 рублей лежит в Народном Азиатско-Европейском Банке. По правилам банка, Вася может сделать за неделю одну из трех операций:

- (1) в понедельник взять из банка 20 рублей, а на следующий день положить туда 2 рубля;
- (2) в понедельник взять из банка 3 рубля, а на следующий день положить туда 30 рублей;
- (3) в понедельник взять из банка 2000 рублей, а на следующий день положить туда 2002 рубля.

Банк денег в долг не дает. Если Вася не может завершить операцию, он объявляется банкротом. Может ли Вася положить все свои деньги в банк?

Первый тур. Премьер–лига.

19 сентября 2007 г.

1. Натуральные числа  $a, b, c$  таковы, что число  $\frac{a\sqrt{3}+b}{b\sqrt{3}+c}$  — рациональное. Докажите, что число  $\frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$  — целое.

2. Положительные числа  $a$  и  $b$  удовлетворяют условию  $\frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1} = \frac{4}{3}$ . Докажите неравенство  $\frac{1}{4a+1} + \frac{1}{4b+1} \geq \frac{2}{3}$ .

3. Могут ли цифры натурального числа, делящегося на 11, идти в строго убывающем порядке слева направо?

4. На плоскости даны  $n$  кругов  $S_1, S_2, \dots, S_n$  равного радиуса, причем круги  $S_i$  и  $S_{i+1}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) касаются в точке  $A_i$  (мы считаем  $S_{n+1} = S_1$ ). Точка  $P$  лежит вне всех этих кругов. Докажите, что произведение длин касательных из  $P$  к этим кругам не больше произведения длин отрезков  $PA_i$ .

5. Середины высот треугольника лежат на одной прямой. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный.

6. Назовём *лесенкой* клетчатую фигуру, состоящую из всех клеток, расположенных в каком-нибудь квадрате с одной стороны от его диагонали. Можно ли какой-нибудь квадрат разбить на 2007 лесенок, каждая из которых содержит не менее 3 клеток?

7. В Цветочном городе каждый житель живет в отдельном домике. Однажды жители города решили обменяться своими домами. После всех переездов выяснилось, что расстояние между новыми домами любых двух жителей не меньше, чем расстояние между их старыми домами. Докажите, что Знайка и Незнайка теперь живут на том же расстоянии, что и раньше.

8. Даны шесть различных попарно взаимно простых натуральных чисел, не превосходящих 100. Докажите, что хотя бы одно из них — простое.

9. В четырехугольнике  $ABCD$  углы  $ABD$  и  $ACD$  прямые, а точка  $M$  — середина стороны  $BC$ . Докажите, что прямая, проходящая через центры описанных окружностей треугольников  $ABM$  и  $CDM$ , параллельна прямой, проходящей через середины сторон  $AB$  и  $CD$ .

10. У Васи есть 1007 рублей, и еще 1000 рублей лежит в Народном Азиатско-Европейском Банке. По правилам банка, Вася может сделать за неделю одну из трех операций:

- (1) в понедельник взять из банка 20 рублей, а на следующий день положить туда 2 рубля;
- (2) в понедельник взять из банка 3 рубля, а на следующий день положить туда 30 рублей;
- (3) в понедельник взять из банка 2000 рублей, а на следующий день положить туда 2002 рубля.

Банк денег в долг не дает. Если Вася не может завершить операцию, он объявляется банкротом. Может ли Вася положить все свои деньги в банк?